

**Pismeni ispit iz OFČS - 7. prosinca 2001.**

**Zadatak 1.** Zadan je izraz za gustoću elektronskih stanja:

$$g(E) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } E < 0 \\ CE^{-1/2} & \text{ako je } 0 < E < E_0 \\ CE^{-1/2} + C(E - E_0)^{-1/2} & \text{ako je } E > E_0 \end{cases}$$

gdje su  $C = 0,8 \cdot 10^{38} \text{ J}^{-1/2} \text{ m}^{-3}$ ,  $E_0 = 0,2 \text{ eV}$ .

Izračunajte Fermijevu energiju  $E_F$  ako je koncentracija elektrona  $ZN = 6,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  !

(  $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  )

---

**Rješenje:**

Fermijevu energiju dobit ćemo iz jednačbe:

$$ZN = \int_0^{E_F} dE g(E)$$

u kojoj je gornja granica integracije nepoznata veličina. Ako je  $E_F < E_0$ , onda se dobiva:

$$ZN = 2C \cdot \sqrt{E_F},$$

a ako je  $E_F > E_0$ , onda je:

$$ZN = 2C \cdot \sqrt{E_F} + 2C \cdot \sqrt{E_F - E_0}.$$

Provjerimo prvi slučaj. Tada se dobiva:

$$E_F^{(0)} = \left( \frac{ZN}{2C} \right)^2 = \left( \frac{6,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}}{2,0 \cdot 0,8 \cdot 10^{38} \text{ J}^{-1/2} \text{ m}^{-3}} \right)^2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}.$$

Oдавde izlazi da je  $E_F > E_0$ . Stoga treba riješiti ovu jednačbu:

$$\sqrt{E_F - E_0} + \sqrt{E_F} = \sqrt{E_F^{(0)}},$$

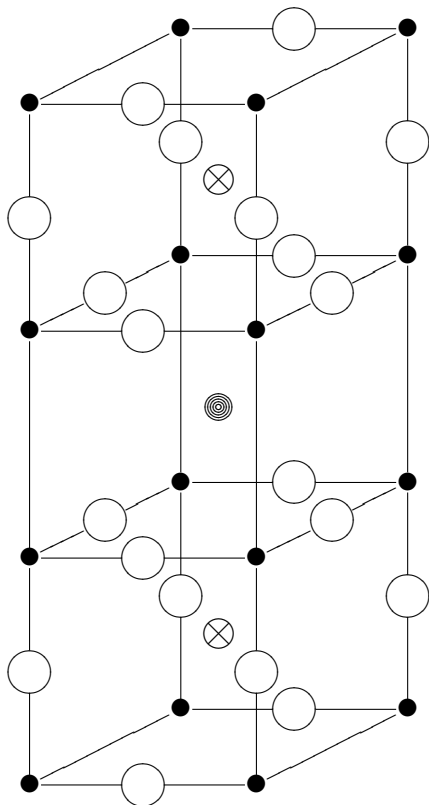
ili

$$E_F - E_0 = E_F^{(0)} + E_F - 2\sqrt{E_F} \sqrt{E_F^{(0)}},$$

odnosno:

$$E_F = \frac{(E_0 + E_F^{(0)})^2}{4E_F^{(0)}} = \frac{(1,0 + 0,2)^2}{4,0 \cdot 1,0} \text{ eV} = 0,36 \text{ eV}.$$

Fermijeva energija  $E_F$  je 0,36 eV.



- kisik
- bakar
- ⊗ barij
- ⊙ itrij

Sl.1: Rešetka visokotemperaturnog supravodiča  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$   
(dimenzije kružića i točke nisu povezane s dimenzijama iona !)

## Zadatak 2.

Na slici je prikazana jednostavna ćelija visokotemperaturnog supravodiča  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Visina ćelije je  $c = 11,708 \text{ \AA}$ , a horizontalne stranice su  $a = 3,827 \text{ \AA}$  i  $b = 3,877 \text{ \AA}$ .

- Koju vrstu kristalne rešetke ima  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ? Među stranicama su pravi kutevi.
- Odrediti broj iona itrija, barija, bakra i kisika unutar jednostavne ćelije! Obrazložiti odgovor!
- Izračunati gustoću monokristala  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ !

(atomska težine iona su  $M_{\text{Ba}} = 137,36 \text{ amu}$ ,  $M_{\text{Cu}} = 63,54 \text{ amu}$ ,  $M_{\text{Y}} = 88,92 \text{ amu}$ ,  $M_{\text{O}} = 16,00 \text{ amu}$ , gdje je  $\text{amu} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .)

## Rješenje:

Kristalna rešetka  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  je ortoromska.

(a)

Ion	analiza	broj
Cu	$8 \text{ vrhove} \times \frac{1}{8} + 4 \text{ c-stranice} \times 2 \times \frac{1}{4}$	3 iona
O	$4 \text{ c-stranice} \times 2 \times \frac{1}{4} + 4 \text{ a-stranice} \times \frac{1}{4} + 4 \text{ površine} \times 2 \times \frac{1}{2}$	7 iona
Ba	$2 \times 1 \text{ u unutrašnjosti}$	2 iona
Y	$1 \times 1 \text{ u središtu}$	1 iona

U jediničnoj ćeliji ima 1 iona itrija, 2 iona barija, 3 iona bakra te 7 iona kisika.

(c) Ukupna masa jedinične ćelije je:

$$M = M_Y + 2 \cdot M_{Ba} + 3 \cdot M_{Cu} + 7 \cdot M_O = 666,26 \text{ amu} = 1,105 \cdot 10^{-24} \text{ kg}.$$

Volumen jedinične ćelije je:

$$V = a \cdot b \cdot c = 173,71 \text{ \AA}^3 = 1,73 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3,$$

pa je gustoća:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1,105 \cdot 10^{-24} \text{ kg}}{1,73 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3} = 6,39 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Gustoća  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  je  $6,39 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

---

### Zadatak 3.

- (a) Izračunati omjer vodljivosti kristala silicija bez primjesa za temperature  $T = 350 \text{ K}$  i  $T = 300 \text{ K}$  ( $\sigma(T=350\text{K}) / \sigma(T=300\text{K})$ ) ako je poluvodički procijep  $E_g = 1,114 \text{ eV}$ .
- (b) Izračunati iznos koncentracije elektrona u vodljivoj vrpici na temperaturi  $T = 300 \text{ K}$ , ako je efektivna masa elektrona  $m_e^* = 0,26 m_e$  odnosno efektivna masa šupljina je  $m_h^* = 0,49 m_e$ , gdje je  $m_e$  elektronska masa.

Napomena:

U intrinzičnom poluvodiču koncentracija elektrona/šupljina u vodljivoj/valentnoj vrpici (zoni) dana je slijedećim izrazom:

$$N(T) = 2 \frac{(2\pi k_B T)^{3/2}}{h^3} (m_e^* m_h^*)^{3/4} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}.$$

( $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $h = 6,62620 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .)

---

### Rješenje:

U poluvodičima i elektroni i šupljine doprinose vodljivost, tako da je ukupna vodljivost:  $\sigma = e(N_e \mu_e + N_h \mu_h)$ . U intrinzičnom poluvodiču bez primjesa koncentracije elektrona i šupljina su iste, pa je vrijedi  $\sigma = eN(T)(\mu_e + \mu_h)$ .

- (a) Omjer vodljivost u poluvodiču bez primjesa dan je omjerom koncentracije broja elektrona/šupljina u vodljivoj/valentnoj vrpici:

$$\frac{N(T_2)}{N(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}.$$

Faktor u eksponentu jednak je:

$$-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{E_g(T_2 - T_1)}{2k_B T_1 T_2} = \frac{1,114 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot (350 - 300) \text{ K}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \cdot 350 \cdot 300 \text{ K}^2} = 3,075,$$

pa je omjer koncentracija:

$$\frac{N(T_2)}{N(T_1)} = \left(\frac{350}{300}\right)^{3/2} e^{3,075} = 1,26 * 21,65 = 27,28.$$

Omjer vodljivosti $\sigma(350)/\sigma(300) = 27,28$ .
---

(b) Faktor u eksponentu izraza za koncentraciju elektrona na temperaturi T= 300K je:

$$\frac{E_g}{2k_B T} = \frac{1,114 \text{ 1,60 } 10^{-19} \text{ J}}{2 \text{ 1,38 } 10^{-23} \text{ 300 J}} = 21,53,$$

pa je iznos eksponencijalne funkcije:  $e^{-21,53} = 4,46 \cdot 10^{-10}$ .

Iznos faktora ispred eksponencijalne funkcije je:

$$\begin{aligned} 2 \frac{(2\pi k_B T)^{3/2}}{h^3} (m_e^* m_h^*)^{3/4} &= 2 \left( \frac{2\pi \cdot 300 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(6,62620)^2 \cdot 10^{-68} \text{ J}^2 \text{ s}^2} \right)^{3/2} (0,26 * 0,49)^{3/4} \\ &= 2 \left( \frac{2,37}{43,91} \right)^{3/2} (0,127)^{3/4} 10^{27} \text{ m}^{-3} = 5,3487 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Ovdje konačno izlazi da je

$$N(300K) = 5,3487 \cdot 10^{24} \cdot 4,46 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-3} = 2,39 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}.$$

Koncentracija elektrona u vodljivoj vrpci je $N = 2,39 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$
--