

Pismeni ispit iz OFČS - 8. srpnja 2002.

Zadatak 1. Na temperaturi od $T = 0,1$ K toplinski kapacitet elektronskog plina je jednak $C_V = 5,87 \text{ J K}^{-1} \text{ m}^{-3}$.

- Izračunati gustoću stanja elektronskog plina na Fermijevom nivou !
- Izračunati Paulijevu susceptibilnost elektronskog plina !

$$(eV = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1})$$

(jedinice: $H = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-2}$, $T = \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$)

Rješenje:

- Toplinski kapacitet elektronskog plina (u Sommerfeldovom modelu) dan je ovim izrazom:

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 g(E_F) T,$$

pa je gustoću stanja

$$\begin{aligned} g(E_F) &= \frac{C_V}{\frac{\pi^2}{3} k_B^2 T} = \frac{5,87 \text{ J K}^{-1} \text{ m}^{-3}}{\frac{\pi^2}{3} (1,38)^2 \cdot 10^{-46} \text{ J}^2 \text{ K}^{-2} \cdot 0,1 \text{ K}} \\ &= 0,94 \cdot 10^{47} \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-3} = 1,5 \cdot 10^{28} (\text{eV})^{-1} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

Gustoća stanja je $1,5 \cdot 10^{28} (\text{eV})^{-1} \text{ m}^{-3}$

- Paulijeva susceptibilnost je dana ovim izrazom:

$$\chi_P = \mu_0 \mu_B^2 g(E_F).$$

Uvrštavanjem:

$$\begin{aligned} \chi_P &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} (9,27)^2 \cdot 10^{-48} \text{ J}^2 \text{ T}^{-2} \cdot 0,94 \cdot 10^{47} \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-3} \\ &= 4\pi (9,27)^2 \cdot 0,94 \cdot 10^{-8} \text{ H m}^{-4} \text{ J T}^{-2} = 1014 \cdot 10^{-8} = 1,014 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Iznos Paulijeve susceptibilnosti je $1,014 \cdot 10^{-5}$

Zadatak 2. Na temperaturi oko 23 K natrijev kristal prelazi iz prostorno centrirane kubne rešetke u heksagonsku gusto slaganu rešetku. Nađi konstantu rešetke heksagonske faze ako pri faznom prijelazu ne dolazi do promjene gustoće kristala. Neka je konstanta rešetke u prostorno centriranoj fazi jednaka $a = 4,23 \text{ \AA}$. Izračunati također udaljenost među najbližim atomima natrija u jednoj i drugoj fazi !

Rješenje: U prostorno centriranoj kubnoj rešetki nalaze se dva cijela natrijeva atoma, pa je gustoća jednaka:

$$\rho = 2 M_{Na} / a^3$$

Volumen gusto slagane heksagonske rešetke je

$$V_{hgs} = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 c = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \sqrt{\frac{8}{3}} b = b^3 \sqrt{2}$$

gdje smo sa b označili konstantu rešetke heksagonske rešetke u ravnini, a sa c konstantu rešetke okomitu na ravninu. Kako se radi u gusto slaganoj heksagonskoj rešetki vrijedi: $c = b \sqrt{8/3}$. U gusto slaganoj heksagonskoj rešetki nalaze se dva atoma po ćeliji, pa je gustoća:

$$\rho = 2 M_{Na} / b^3 \sqrt{2}$$

Izjednačavanje tih dvaju gustoća nalazimo da je:

$$b^3 \sqrt{2} = a^3,$$

odnosno

$$b = a / 2^{1/6} = \frac{4,23}{2^{1/6}} \text{ \AA} = 3,768 \text{ \AA}$$

Konstanta rešetke u heksagonskoj fazi je 3,768 Å

Udaljenost među atomima u prostorno centriranoj kubnoj rešetki je:

$$d_{bcc} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 3,66 \text{ \AA}.$$

U heksagonskoj gusto slaganoj rešetki udaljenost među atomima je ujedno i konstanta rešetke.

Udaljenosti među atomima su $d_{bcc} = 3,66 \text{ \AA}$ i $d_{hcp} = 3,77 \text{ \AA}$

Zadatak 3. Na temperaturi od 300 K, električna otpornost slitine volframa i renija, $W_{1-x}Re_x$, sastava $x = 0,05$ je jednaka $10,4 \cdot 10^{-8} \Omega m$, a sastava $x = 0,21$ je $24,2 \cdot 10^{-8} \Omega m$. Izračunati dio otpornosti (u postocima) koji dolazi zbog raspršenja elektrona na fononskim pobuđenjima za slitinu sastava $x = 0,05$.

Rješenje:

Otpornost materijala ima dva doprinosa (Matthiessenovo pravilo), temperaturno ovisni dio koji dolazi od raspršenja na fononskim pobuđenjima ($\rho_{ph}(T)$), te rezidualni dio koji je temperaturno neovisan i potiče od raspršenja na statičkim defektima rešetke - u ovom slučaju prisustvom atoma renija. U binarnim slitinama rezidualni dio otpornosti ovisi o sastavu slitine (Nordheimovo pravilo) kao:

$$\rho_r = A \cdot x \cdot (1 - x).$$

Stoga se otpornost slitine može prikazati ovako:

$$\rho(x, T) = \rho_{ph}(T) + A \cdot x \cdot (1 - x).$$

Koristeći zadane podatke dobivamo ovaj sustav jednačbi:

$$\rho(0,05, 300 \text{ K}) = \rho_{ph}(300 \text{ K}) + A \cdot 0,05 \cdot 0,95 = \rho_{ph}(300 \text{ K}) + 0,0475A = 10,4 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho(0,21, 300 \text{ K}) = \rho_{ph}(300 \text{ K}) + A \cdot 0,21 \cdot 0,79 = \rho_{ph}(300 \text{ K}) + 0,1659A = 24,2 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

za nepoznate veličine $\rho_{ph}(300 \text{ K})$ i A . Rješavanjem sistema jednačbi nalazimo da su:

$$\begin{aligned} A &= 116,55 \cdot 10^{-8} \Omega m \\ \rho_{ph}(300 \text{ K}) &= 4,86 \cdot 10^{-8} \Omega m \end{aligned}$$

Udio otpornosti koji dolazi od raspršenja na fononskim pobuđenjima dan je s omjerom:

$$\frac{\rho_{ph}(300 \text{ K})}{\rho(0,05, 300 \text{ K})} = 0,47.$$

Elektronska raspršenja na fononskim pobuđenjima daju 47 % otpornosti