Metal u oscilirajućem električnom polju

- Raspršivanje elektrona na preprekama može se tretirati kao vrst sile trenja.
- Jednadžba gibanja elektrona:

$$m\,\dot{u} = \underbrace{-e\,F_0\,e^{-i\omega t}}_{\text{sila el. polja}} - \underbrace{\gamma\,m\,u}_{\text{trenje}},$$

  gdje je u srednja brzina gibanja elektrona, a ω je frekvencija titranja električnog polja.
- Tražimo rješenje jednadžbe u obliku:

$$u(t) = A \cdot e^{-i\omega t}$$

▷ Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja slijedi da je:

$$A = -\frac{e\,F_0}{m(\gamma - i\omega)}.$$

▷ Struja je:

$$j = -e\,ZN\,u = \underbrace{\frac{ZN\,e^2}{m(\gamma - i\omega)}}_{\sigma(\omega)}\ \underbrace{F_0\,e^{-i\omega t}}_{\text{el. polje}}$$

▷ Provodnost je:

$$\sigma(\omega) = \frac{ZN\,e^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

▷ Za statičko električno polje ($\omega = 0$):

$$\sigma(\omega = 0) = \frac{ZN\,e^2}{m\gamma} \equiv \frac{ZN\,e^2\tau}{m}$$

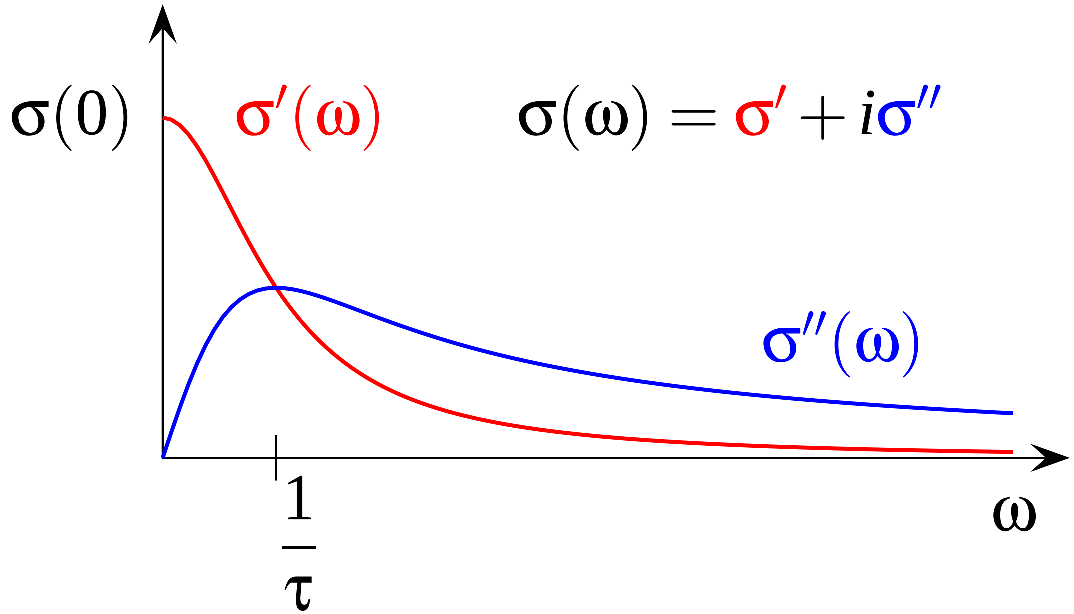
▷ Konstanta trenja γ jednaka je inverznom relaksacijskom vremenu:

$$\gamma = \frac{1}{\tau}$$

Općenito za konačnu frekvenciju:

$$\sigma(\omega) = \sigma(0)\,\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \begin{cases} \xrightarrow{\omega\tau \ll 1} \sigma(0)\,(1 + i\omega\tau) \\ \xrightarrow{\omega\tau \gg 1} \sigma(0)\,\left[\frac{1}{(\omega\tau)^2} + \frac{i}{\omega\tau}\right] \end{cases}$$

provodnost ima realni i imaginarni dio.



Za $\omega\tau \gg 1$, $\sigma'(\omega) \to 0$, odnosno otpornost, ρ, raste.

- U Drudeovom modelu, $\sigma'(\omega)$ ima jednostavnu frekvencijsku ovisnost. Postoji samo vrh za $\omega = 0$ (Drudeov vrh).

- U realom metalu postoje i drugi precesi koji mogu dati doprinose provodnosti za $\omega \neq 0$:

  Kod visokih frekvencija provodnosti doprinose procesi prelaza elektrona između vrpci, a kod niskih frekvencija postoje dopronosi fononskih pobuđenja.

- Između realnog i imaginarnog dijela provodnosti postoji veza. Realni se dio može izračunati iz imaginarnog, ili obrnuto. To je posljedica toga što je $\sigma(\omega)$ analitička funkcija kompleksne varijable ω.

Matthiessenovo pravilo

- Otpor u metalu je posljedica nepravilnosti rešetke. U idelnoj rešetki $\tau \to \infty$, pa stoga i $\sigma \to \infty$. Takav metal zovemo **idealni vodič**.

- Ne postoje idealni vodiči. Ne postoje realni metali s idealnom rešetkom.

  Svaki materijal ima određenu koncentraciju primjesa. I osim toga na svakoj konačnoj temperaturi postoje fononska titranja rešetke.

- Prema kvantnoj mehanici, vjerojatnost sudara s nepravilnostima rešetke obrnuto je proporcionalna relaksacijskom vremenu:

$$w \sim \frac{1}{\tau}$$

- Ako postoji više mogućih načina sudara elektrona, tada se vjerojatnosti sudara međusobno zbrajaju.
- Neka je w_r vjerojatnost sudara na primjesi, a neka je w_f vjerojatnost sudara na titranju rešetke. Tada je:

$$w = w_r + w_f$$

- Također:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_f}$$

- Kako za provodnost vrijedi $\sigma \sim \tau$, tada je:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_r} + \frac{1}{\sigma_f}$$

odnosno:

$$\rho = \underbrace{\rho_r}_{\text{primjese}} + \underbrace{\rho_f}_{\text{fononi}}$$

- Također ako postoji više vrsta primjesa:

$$\rho_r = \rho_{r_1} + \rho_{r_2} + \rho_{r_3} + \ldots$$

  Ovo pravilo zbrajanja otpornosti pronašao je opažanjem Matthiessen 1862. godine.

- Na niskim temperaturama titranja rešetke su zanemariva, pa pretežni doprinost otpornosti dolazi od primjesa. Otpornost od primjesa ne ovisi o temperaturi:

$$\rho_f \ll \rho_r \quad \Rightarrow \quad \rho \approx \rho_r$$

  Otpor na niskim temperaturama zovemo **rezidualni otpor**.

- Na visokim temperaturama preovladava otpor od raspršenja na fononskim pobuđenjima:

$$\rho_f \gg \rho_r \quad \Rightarrow \quad \rho \approx \rho_f$$

Nordheimovo pravilo (otpornost slitina)

- Slitine (legure) su smjese više metala. Time se nastoji postići čvrstoća (ili neka druga svojstva) koja čisti metali nemaju.
- Miješanjem metala gubi se periodičnost rešetke, pa je otpornost slitina veća od otpornosti *čistih* metala.
- Promotrimo binarne legure tima Ag-Cu, Ag-Au, Cu-Sn, Mg-Cd, ...
  - Ako je koncentracija prvog metala mala naspram koncentracije drugog - tada se on može tretirati kao primjesa, pa vrijedi: $\rho \sim n_1$.
  - Također, ako je koncentracija drugog metala mala naspram koncentracije prvog - tada se drugi metal može tretirati kao primjesa i vrijedi: $\rho \sim n_2$.
  - Oba izraza mogu se objediniti u jedan: $\rho \sim n_1 \cdot n_2$.

Northeim (1931. godine)

- Općenito vrijedi: $n = n_1 + n_2$. Neka je:

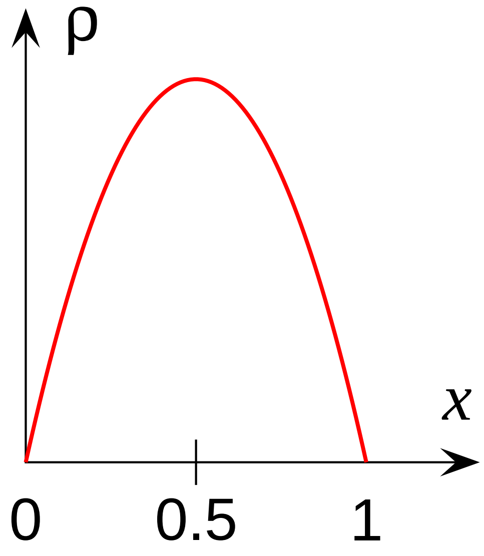
$$x = \frac{n_1}{n}$$

relativna koncentracija prve komponente, odnosno:

$$1 - x = \frac{n_2}{n}$$

relativna koncentracija druge komponente. Tada je:

$$\rho \sim x \cdot (1 - x)$$



Binarna legura ima maksimalni otpor kada je koncentracija obiju komponenti ista.

Fononski doprinos otporu metala

- Uzet ćemo u obzir samo akustičke fonone. Koristit ćemo Debyeov model gdje je fononska frekvencija:

$$\omega = v_0\,|\vec{k}| \qquad\qquad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda},$$

gdje je v_0 brzina širenja zvuka u metalu.

- Maksimalna fononska energija $\hbar\omega_m$ puno je manja od elektronskih energija energija, koje su tipično $\sim e_F$.

$$\hbar\omega_m = \hbar v_0 k_m \approx 5,0\ 10^{-21}\ \text{J}\ \sim 0,03\ \text{eV},$$

za v_0 = 5,0 10^3 m/s, k_m = 10^{10} m^{-1}.

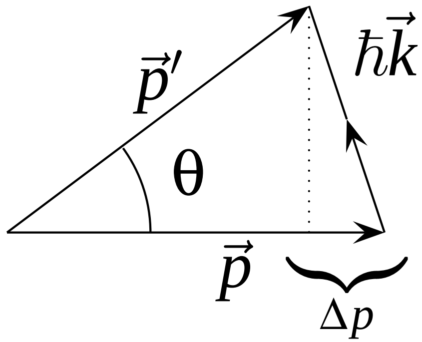
- Elektroni u sudarima na titranjima rešetke, zanemarivo malo mijenjaju energiju - pa se procesi raspršenja mogu smatrati kvazielastičnim.

- ▷ Najvjerojatniji će biti procesi u kojim elektron gibajući se sudara se s ionom te pobuđuje titranje (proces stvaranja fonona), odnosno kada njegov sudar s ionom poništava titranje (apsorpcija fonona).

- ▷ Pri sudarima može doći do većih promjena impulsa elektrona (tj. smjera gibanja). U sudarima će vrijediti zakoni sačuvanja impulsa: ukupni impuls prije sudara bit će jednak ukupnom impulsu poslije sudara.

$$
\begin{aligned}
E = \frac{p^2}{2m} &= E' = \frac{{p'}^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}| = |\vec{p}'| \\
\vec{p}' &= \vec{p} \pm \hbar\vec{k}
\end{aligned}
$$

gdje je $\hbar\vec{k}$ impuls fononskog pobuđenja koje je stvoreno ili apsorbirano u sudaru.



Δp je promjena impulsa u početnom smjeru gibanja elektrona a zbog raspršenja na fononu.

$$
\begin{aligned}
\pm\hbar\vec{k} &= \vec{p} - \vec{p}' \qquad \Rightarrow \\
\hbar^2 k^2 &= p^2 + p'^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{p}' = 2p^2(1-\cos\theta) = 2p\cdot\Delta p
\end{aligned}
$$

odnosno:

$$
\Delta p = \frac{(\hbar k)^2}{2p} \sim k^2
$$

Apsorpcija/emisija fonona malog valnog broja izaziva male promjene u gibanju elektrona, dok fononi velikog valnog broja jako utiču na gibanje elektrona.

Otpornost od raspršenja na fononima:

$$\rho_f \sim \sum_k N_k \, \Delta p \; = \; \sum_k k^2 N_k \; = \; \sum_k \frac{k^2}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}$$

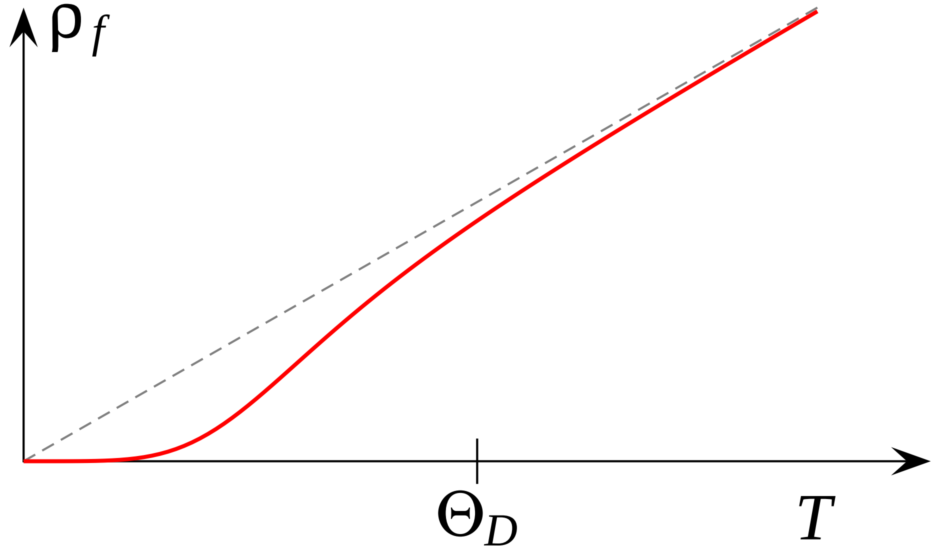
Koristeći istu proceduru koju smo imali kod izračuna toplinskog kapa-citeta fononskog titranja:

$$\rho_f \sim \int_0^{\omega_m} d\omega \, \frac{\omega^4}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \; = \; T^5 \cdot \int_0^{\Theta_D/T} dx \, \frac{x^4}{e^x - 1}$$

Temperaturno ponašanje za niske i visoke temperature:

$$\rho_f \begin{cases} \xrightarrow{T \ll \Theta_D} \mathit{konst} \cdot T^5 \\ \xrightarrow{T \gg \Theta_D} \mathit{konst} \cdot T \end{cases}$$

Bloch (1928. god.)



Toplinska otpornost of fononskih pobuđenja

▷ Toplinska provodnost je općenito dana:

$$\kappa = \frac{1}{3} v \Lambda C_V \sim \Lambda T,$$

budući da je brzina gibanja elektrona $v \sim v_F$ konstantna i toplinski je kapacitet $C_V \sim T$.

▷ U niskotemperaturnom području, $T \ll \Theta_D$, vrijedi:

$$\rho \approx \rho_r, \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda \approx \text{konst},$$

pa je $\kappa \sim T$.

U visokotemperaturnom području, $T \gg \Theta_D$, vrijedi:

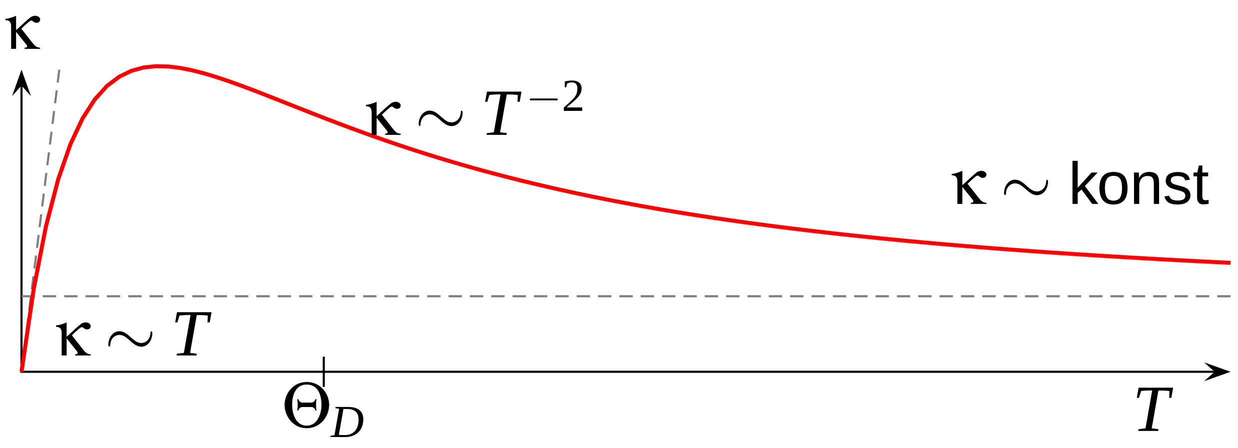
$$\rho \approx \rho_f, \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda \sim \frac{1}{N_f} \qquad \text{jer je } \rho \sim N_f,$$

pa je

$$\kappa \sim \frac{T}{N_f} \begin{cases} \xrightarrow{T \ll \Theta_D} \dfrac{1}{T^2} \\[2ex] \xrightarrow{T \gg \Theta_D} \text{konst} \end{cases}$$

budući da

$$N_f = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \sim \int dk \, \frac{k^2}{e^{\beta \hbar v k} - 1} \begin{cases} \xrightarrow{T \ll \Theta_D} \text{konst } T^3 \\[2ex] \xrightarrow{T \gg \Theta_D} \text{konst } T \end{cases}$$



Wiedemann-Franzov zakon - ponovo

▷ Ako je $T \gg \Theta_D$ (visoke temperature):

$$\left.\begin{array}{l} \kappa \longrightarrow \text{konst} \\ \sigma \sim T^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{\sigma T} \longrightarrow \text{konst.}$$

▷ Ako je $T \ll \Theta_D$ (niske temperature):

$$\left.\begin{array}{l} \kappa \sim T^{-2} \\ \sigma \sim T^{-5} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{\sigma T} \sim T^2$$ NE VRIJEDI

▷ Jako niske temperature:

$$\left.\begin{array}{l} \kappa \sim T \\ \sigma \longrightarrow \text{konst} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{\sigma T} \longrightarrow \text{konst}$$ OPET VRIJEDI