

Gibanje tekućine

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2008

Različiti načini opisa gibanja

Ubrzanje čestica tekućine

Vremenska promjene u čestici tekućine

Strujnice i trajektorije

Deformacija tekućine

Potencijalno strujanje

Gibanje čestice tekućine se može promatrati na dva načina.

Eulerov način: promatrač se nalazi u mirujućem sustavu i promatra gibanje tekućine u nekoj točki prostora i nekom trenutku vremena.

Gibanje tekućine opisano je vektorskim poljem brzine:

$$\vec{v}(\vec{r}, t).$$

\vec{v} **nije** brzina jedne određene čestice tekućine, nego one čestice koja se u datom momentu vremena t našla u prostornoj točki \vec{r} .

To je način na koji ribič koji peca ribu na obali rijeke vidi gibanje rijeke oko niti udice.

Lagrangeov način: Promatrač prati gibanje jedne određene čestice tekućine. Čestica se može specificirati pomoću položaja čestice \vec{r} koji ona ima u vremenskom trenutku t . Položaj čestice \vec{r} je ovisan o vremenu. Brzina čestice u Lagrangeovom opisu označavat će se velikim slovom:

$$\vec{V}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t) = \vec{V}(\vec{r}_0, t)$$

Položaj čestice u nekom proizvoljnom trenutku vremena određen je njenim početnim položajem i vremenom t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t),$$

To je način na koji ribič na obali vidi gibanje čamca kojeg rijeka nosi.

Ubrzanje čestica tekućine

Čestica koja je u trenutku t bila u točki \vec{r} i imala brzinu $\vec{v}(\vec{r}, t)$, u trenutku $t + \Delta t$ nalaziti će se u točki:

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \Delta t$$

te imati brzinu:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(\vec{r}_1, t + \Delta t) \approx \vec{v}(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \Delta t, t + \Delta t)$$

Ukupna promjena brzine unutar malog vremenskog intervala Δt je:

$$\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} \approx (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Dakle promjena brzine ima dva doprinosa:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t)$$

- ▶ Prvi član sadrži eksplicitnu vremensku derivaciju i različit je od nule samo u nestacionatnim situacijama.
- ▶ Drugi je član različit od nule samo ako se tekućina neuniformno giba (prostorno ovisna brzina).

Npr. ako tekućina struji kroz cijev različitog uzdužnog presjeka. Čestica će se ubrzavati u užem dijelu i usporavati u širem, iako je brzina u svakoj pojedinoj točki prostora vremenski konstantna.

Vremenska promjene u čestici tekućine

Ono što vrijedi za brzinu čestice tekućine vrijedi i za svaku drugu fizikalnu veličinu.

Promatra li se neka (skalarna) veličina $f(\vec{r}, t)$ koja karakterizira samu česticu tekućine, tada je ukupna vremenska promjena te veličine u čestici:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})f$$

Često se ukupna vremenska derivacija

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

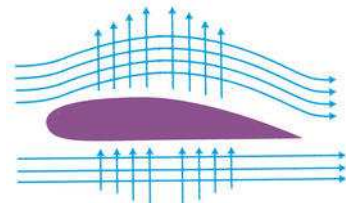
naziva **konvektivna** derivacija ili **materijalna** derivacija.

Za nju se koristi i posebna oznaka:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

Strujnica je prostorna krivulja (linija) koja je u točkama prostora kroz koje prolazi **kolinearna** s brzinom tekućine.

Ako je riječ o nestacionarnom gibanju, strujnice se vremenski mijenjaju kako se brzina tekućine mijenja.



Slika: Strujnice oko krila.

Iz definicije izlazi skup diferencijalnih jednažbi koji određuju strujnicu. Označi li se s \vec{dl} tangenta strujnice,

$$\vec{dl} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

tada je vektor \vec{dl} paralelan (kolinearan) s vektorom brzine tekućine:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}$$

Ova se jednažba može i ovako zapisati:

$$\vec{dl} \times \vec{v} = 0.$$

Trajektorija (putanja)

Trajektorija ili putanja je skup svih točaka koju u vremenu prolazi jedna čestica tekućine.

U Langrangeovom opisu brzina čestice je:

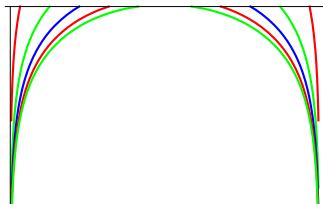
$$\vec{V}(\vec{r}_0, t),$$

te se položaj čestice dobiva integriranjem te brzine po vremenu:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t dt \vec{V}(\vec{r}_0, t).$$

U slučaju stacionarnog gibanja (vremenski neovisnog) i trajektorija i strujnica su iste krivulje.

Strujnice i trajektorije - primjeri



Slika: Strujnice kod valova na vodi.

Za valove na vodi brzine čestice tekućine su približno ($y < 0$):

$$v_x = A e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

$$v_y = A e^{ky} \cos(kx - \omega t)$$

Integrirajući jednačbu za strujnice dobiva se:

$$y = y_0 + B \log \left[\frac{\sin(x)}{\sin(x_0)} \right]$$

Strujnice i trajektorije - primjeri



Slika: Trajektorije čestica kod valova na vodi

Integrirajući približno jednačbu za trajektorije izlazi da je:

$$x(t) \approx x_0 - \frac{A}{\omega} e^{ky_0} \cos(kx - \omega t)$$

$$y(t) \approx y_0 - \frac{A}{\omega} e^{ky_0} \sin(kx - \omega t)$$



Trajektorije su kružnice:

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 e^{2ky_0}$$

čiji je radijus to manji što je dubina veća.



Ako se na početku ($t=0$) izaberu četiri (ili 8) čestice tekućine koje čine pravilni kvadrat (ili kocku), gibanje tekućine će dovesti do deformiranja oblika kvadrata (kocke). Ta deformacija će se s vremenom stalno povećavati.

Ključna veličina koja opisuje deformiranje je prostorna ovisnost brzine, koju se može zapisati kao jednu matricu ili tenzor:

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{gdje su } v_i = v_x, v_y, v_z, \quad x_j = x, y, z.$$

Veličinu G_{ij} zove se **tenzor brzine deformacije**. Tenzor G_{ij} je 3×3 matrica zadana s 9 brojeva. Međutim, tih 9 brojeva tenzora nisu fizikalno ekvivalentni.

Dekompozicija matrice/tenzora u ireducibilne dijelove

- ▶ Mnoge fizikalne veličine opisane su vektorima, a oni se obično prikazuju kao skup od 3 broja koja predstavljaju projekcije vektora na koordinatne osi:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

gdje su koordinate:

$$x = \vec{r} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{r} \cdot \vec{j}, \quad z = \vec{r} \cdot \vec{k}.$$

- ▶ Koordinate ovise o izboru koordinatnog sustava. Izborom drugog koordinatnog sustava zarotiranog u odnosu na prvi, vektor će imati drugi skup koordinata koje ga predstavljaju. Nove koordinate obično su dane kao linearna kombinacija starih:

$$x' = R_{11} x + R_{12} y + R_{13} z$$

$$y' = R_{21} x + R_{22} y + R_{23} z$$

$$z' = R_{31} x + R_{32} y + R_{33} z$$

Dekompozicija matrice/tenzora u ireducibilne dijelove

- ▶ Tako i matrica/tenzor mijenja svoje komponente u novom zarotiranom koordinatnom sustavu. Pri tome su nove komponente matrice, njih 9, dane kao linearna kombinacija starih 9 komponenata. Dakle matrica transformacije je 9×9 .
- ▶ Transformacija matrice se može značajno pojednostaviti uočavanjem neke pravilnosti:
 - ▶ dijagonalna matrica je u svakom koordinatnom sustavu ista. (trag matrice - jedan nezavisni broj)
 - ▶ simetrična matrica čiji trag je jednak nuli, pri transformaciji ponovo ostaje simetrična s tragom jednakim nuli. (5 nezavisnih brojeva)
 - ▶ antisimetrična matrica pri transformaciji ponovo ostaje antisimetrična. (3 nezavisnih brojeva)
- ▶ Očito da pojedini dijelovi matrice se transformiraju nezavisno jedni od drugih. Svaka 3×3 matrica može se rastaviti u dijelove koji se transformiraju međusobno nezavisno ($9 = 5 + 3 + 1$).

Matrica G_{ij} se može razložiti u tri dijela koja fizikalno opisuju različite vrste deformiranja tekućine:

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \overbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]}^{(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} \quad \text{trag matrice}$$
$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{antisimetrični dio}$$
$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] - \frac{\delta_{ij}}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad \text{simetrični bez traga}$$

Deformacija tekućine

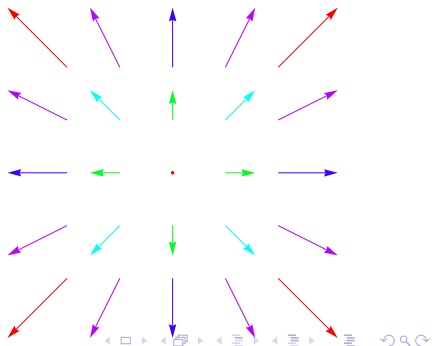
1. dio G_{ij} je dan s tragom matrice ($\sim \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$) odgovara zgušnjavanju (ili razrijeđivanju) tekućine. Poznat je i kao **volumna dilatacija** (kompresija, ekspanzija).

Npr. ako se tekućina giba od centra:

$$\vec{v}(\vec{r}) = c \vec{r}.$$

Tenzor brzine deformacije je:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$



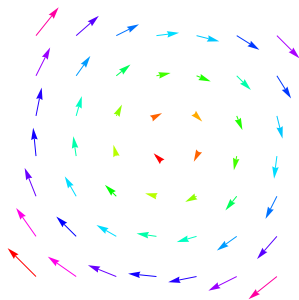
2. dio G_{ij} (antisimetrični) različit je od nule kada se tekućina rotira.

Npr. za **krutu rotaciju** tekućine polje brzina je:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

gdje je $\vec{\Omega}$ vektor oko kojeg tekućina rotira. Dobiva se:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$



3.dio G_{ij} (simetrični) predstavlja gibanje tekućine u kojem se ona u jednom smjeru **skuplja** a u drugom (okomitom) **rasteže**.

Primjeri:

$$v_x = c y$$

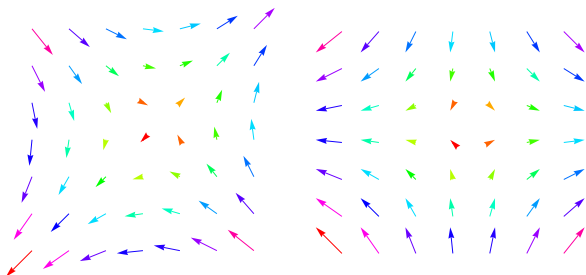
$$v_y = c x$$

$$v_z = 0$$

$$v_x = +c x$$

$$v_y = -c y$$

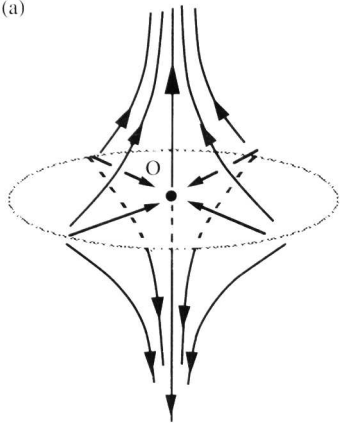
$$v_z = 0$$



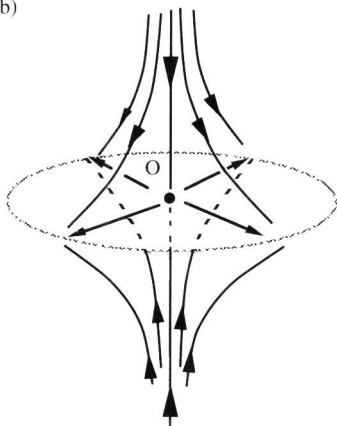
Pogodnom rotacijom takva matrica se može dovesti u dijagonalni oblik.

Deformacija tekućine

(a)



(b)



Slika: Prikaz gibanje tekućine u 3D koje se sastoji od skupljanja i rastezanja.

Brzina se tekućine uvijek može razložiti u 3 člana:

$$\vec{v} = \vec{v}^{(d)} + \vec{v}^{(a)} + \vec{v}^{(s)}.$$

- ▶ Prvi član opisuje promjene gustoće tekućine (odnosno volumena čestice tekućine konstantne mase) te vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(d)} \sim \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \neq 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(d)} = 0.$$

- ▶ Drugi član opisuje rotacijsko gibanje, te vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(a)} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(a)} \neq 0.$$

- ▶ Za treći član vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(s)} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(s)} = 0.$$

Gibanje tekućine koje zadovoljava svojstvo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0.$$

poznato je kao **potencijalno strujanje**, i vrlo je nalik problemu stacionarnog električnog polja u vakuumu.

Polje brzina moguće je tada prikazati kao gradijent potencijala:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi.$$

A sam potencijal zadovoljava Laplaceovu jednažbu:

$$\Delta \Phi = 0.$$