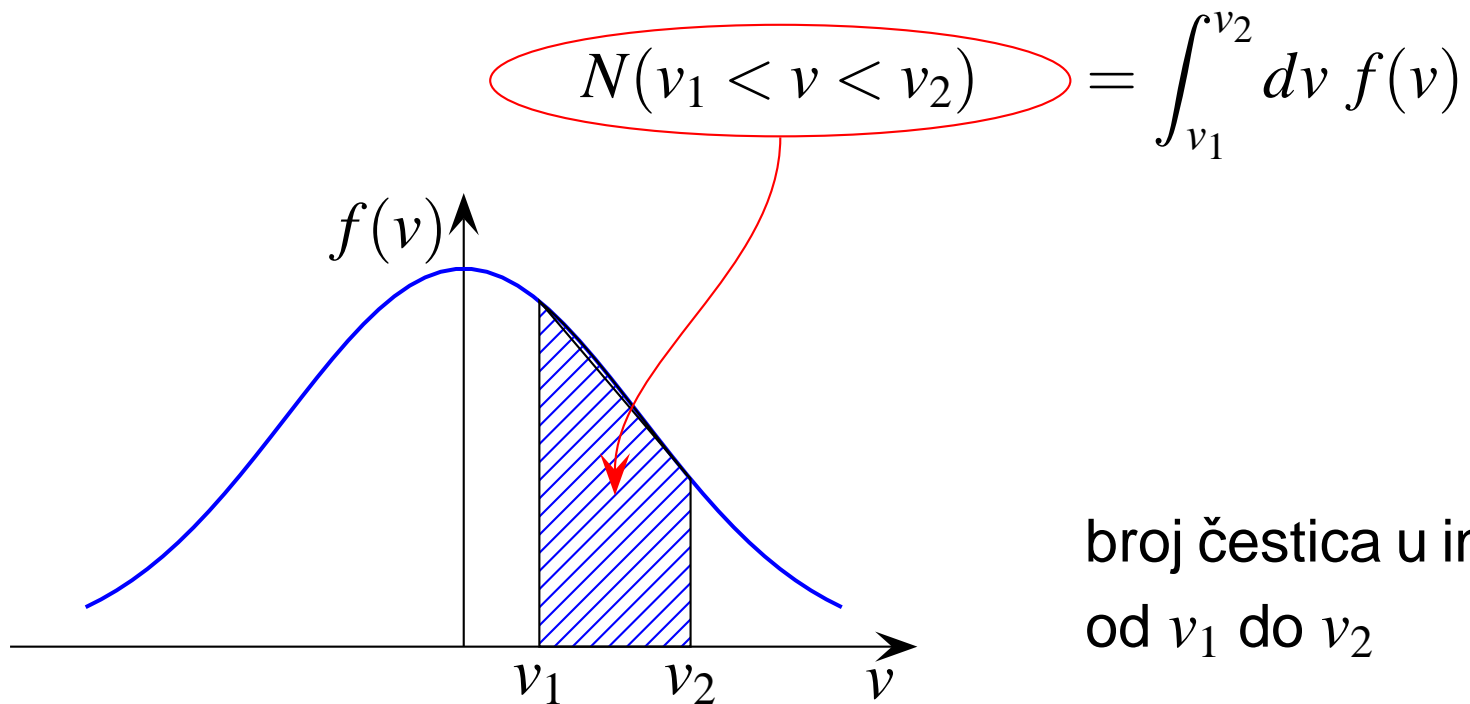


Klasična statistička fizika

malo ponavljanja

Raspodjela po brzinama, $f(v)$, govori nam o broju čestica u nekom intervalu brzina:



broj čestica u intervalu brzina
od v_1 do v_2

▷ Ukupan broj čestica:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(v)$$

▷ Raspodjela normirana na jedinicu:

$$F(v) = \frac{f(v)}{N}$$

▷ Vjerojatnost da se čestica ima brzinu unutar nekog intervala, npr. (v_1, v_2) :

$$w(v_1 < v < v_2) = \int_{v_1}^{v_2} F(v) dv$$

▷ Za $dw = F(v) dv$ vrijedi:

$$1 \geq dw \geq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dw = 1$$

▷ dw je vjerojatnost da čestica ima brzinu unutar infinitezimalno malog intervala širine dv oko brzine v .

- ▷ U tri dimenzije imamo funkciju raspodjele po komponentama brzine:

$$N(\text{u 3D intervalu brzina}) = \int d^3v f_{3D}(v_x, v_y, v_z) = N \int d^3v F_{3D}(v_x, v_y, v_z)$$

- ▷ Postoji i funkcija raspodjele po samo jednoj komponenti brzine, npr. x -komponenti (bez obzira na iznose drugih komponenti brzine):

$$N_x(v_1 < v_x < v_2) = \int_{v_1}^{v_2} dv_x f_x(v_x) = N \int_{v_1}^{v_2} dv_x F_x(v_x)$$

- ▷ A vjerojatnost da čestica ima x -komponentu brzine u intervalu (v_1, v_2) je:

$$p(v_1, v_2) = \frac{N_x(v_1 < v_x < v_2)}{N}$$

- ▷ A vjerojatnost da čestica ima x -komponentu brzine u vrlo malom intervalu širine Δv_x oko v_x :

$$p\left(v_x - \frac{\Delta v_x}{2}, v_x + \frac{\Delta v_x}{2}\right) = \int_{v_x - \frac{\Delta v_x}{2}}^{v_x + \frac{\Delta v_x}{2}} dv_x F_x(v_x) \approx F_x(v_x) \cdot \Delta v_x$$

- ▷ Isto tako, možemo govoriti o vjerojatnosti da čestica ima y/z -komponentu brzine u vrlo malom intervalu širine $\Delta v_{y/z}$ oko $v_{y/z}$:

$$p\left(v_y - \frac{\Delta v_y}{2}, v_y + \frac{\Delta v_y}{2}\right) \approx F_y(v_y) \cdot \Delta v_y$$

$$p\left(v_z - \frac{\Delta v_z}{2}, v_z + \frac{\Delta v_z}{2}\right) \approx F_z(v_z) \cdot \Delta v_z$$

- ▷ Kolika je vjerojatnost da čestica ima brzinu u vrlo malom prostornom intervalu širine $(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$, oko brzine $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$?

Ova je vjerojatnost može izračunati na dva načina.

▷ Preko F_{3D} funkcije raspodjele:

$$p\left(v_x - \frac{\Delta v_x}{2}, v_x + \frac{\Delta v_x}{2}; v_y - \frac{\Delta v_y}{2}, v_y + \frac{\Delta v_y}{2}; v_z - \frac{\Delta v_z}{2}, v_z + \frac{\Delta v_z}{2}\right) \\ \approx F_{3D}(\vec{v}) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

▷ Ili preko funkcija raspodjela po komponentama:

$$p\left(v_x - \frac{\Delta v_x}{2}, v_x + \frac{\Delta v_x}{2}; v_y - \frac{\Delta v_y}{2}, v_y + \frac{\Delta v_y}{2}; v_z - \frac{\Delta v_z}{2}, v_z + \frac{\Delta v_z}{2}\right) \\ \approx [F_x(v_x) \Delta v_x] \cdot [F_y(v_y) \Delta v_y] \cdot [F_z(v_z) \Delta v_z] \\ \approx F_x(v_x) F_y(v_y) F_z(v_z) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z,$$

jer se traži da čestica zadovoljava tri nezavisna uvjeta istovremeno i čije su nam vjerojatnosti poznate.

(Koristimo se pravilom množenja vjerojatnost!)

- ▷ Izjednačavanjem izraza za vjerojatnost dobivamo vezu između 3D funkcije raspodjele po komponentama brzine i funkcija raspodjele po pojedinim komponentama brzine:

$$F_{3D}(\vec{v}) \equiv F_{3D}(v_x, v_y, v_z) = F_x(v_x) \cdot F_y(v_y) \cdot F_z(v_z)$$

- ▷ Ako su svi smjerovi međusobno ekvivalentni, onda su funkcije F_x, F_y i F_z identične. Ovu jedinstvenu funkciju možemo označiti s F_{1D} . Dakle vrijedi:

$$F_{3D}(v_x, v_y, v_z) = F_{1D}(v_x) \cdot F_{1D}(v_y) \cdot F_{1D}(v_z).$$

Razlika među funkcijama raspodjele po x, y i z -komponentama brzine je u različitom argumentu.

Maxwellova raspodjela čestica po brzinama

Malo prije dobiveni izraz između funkcija raspodjele F_{3D} i F_{1D} iskoristit ćemo za određivanje Maxwellove raspodjele čestica po brzinama, a koju je on izveo 1859. godine.

Dakle znamo da vrijedi:

$$F_{3D}(v_x, v_y, v_z) = F_{1D}(v_x) \cdot F_{1D}(v_y) \cdot F_{1D}(v_z).$$

Da bi odredili formu funkcija F_{3D} i F_{1D} poslužit ćemo se s nekoliko simetrijskih argumenata koji vrijede u *homogenom izotropnom* sustavu. Dakle nema djelovanja vanjskih sila na sustav.

- ▷ Funkcije raspodjele ne ovise o predznaku komponenti brzina.
- ▷ Funkcija raspodjele F_{3D} ne ovisi o izboru koordinatnog sustava.

- ▷ Ako funkcije raspodjele ne ovise o predznaku komponenti onda su one funkcije kvadrata komponenti:

$$F_{3D}(\pm v_x, \pm v_y, \pm v_z) = \tilde{F}_{3D}(v_x^2, v_y^2, v_z^2)$$

$$F_{1D}(\pm v_x) = \tilde{F}_{1D}(v_x^2)$$

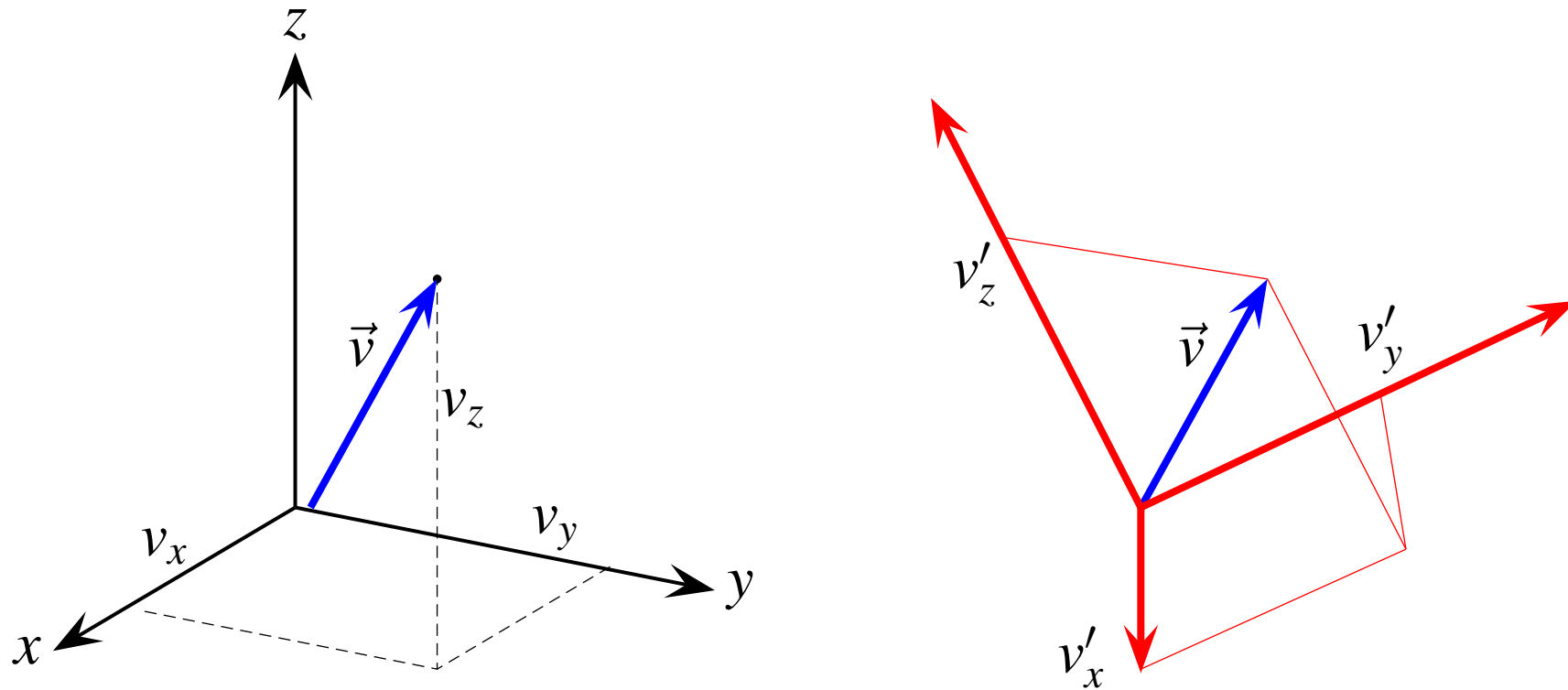
$$F_{1D}(\pm v_y) = \tilde{F}_{1D}(v_y^2)$$

$$F_{1D}(\pm v_z) = \tilde{F}_{1D}(v_z^2)$$

- ▷ Prema tome veza među funkcijama raspodjele glasi:

$$\tilde{F}_{3D}(v_x^2, v_y^2, v_z^2) = \tilde{F}_{1D}(v_x^2) \cdot \tilde{F}_{1D}(v_y^2) \cdot \tilde{F}_{1D}(v_z^2)$$

A što se događa ako zarotiramo koordinatni sustav prema kojem računamo komponente vektora brzine ?



Rotacijom dobivamo drugi skup komponenti:

$$(v_x, v_y, v_z) \xrightarrow{\text{rotacija}} (v'_x, v'_y, v'_z)$$

Novi skup komponenti je linearna kombinacija starih komponenti:

$$v'_x = a_{11} v_x + a_{12} v_y + a_{13} v_z$$

$$v'_y = a_{21} v_x + a_{22} v_y + a_{23} v_z$$

$$v'_z = a_{31} v_x + a_{32} v_y + a_{33} v_z$$

Komponente matrice a_{ij} opisuju rotaciju koordinatnog sustava.

Je li naša funkcija raspodjele postala drugačija funkcije u novim koordinatama ? Ne. Ona mora ostati ista i nakon rotacije:

$$\tilde{F}_{3D}(v_x^2, v_y^2, v_z^2) = \tilde{F}_{3D}(v_x'^2, v_y'^2, v_z'^2)$$

To je moguće samo ako je:

$$\tilde{F}_{3D}(v_x^2, v_y^2, v_z^2) = \tilde{F}_{3D}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \tilde{F}_{3D}(|\vec{v}|^2)$$

jer se iznos (dužina) vektora ne mijenja kod rotacije koordinatnog sustava!

Veza između funkcija raspodjele sada se može zapisati u slijedećem obliku:

$$\tilde{F}_{3D}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \tilde{F}_{1D}(v_x^2) \cdot \tilde{F}_{1D}(v_y^2) \cdot \tilde{F}_{1D}(v_z^2)$$

Ova će relacija vrijediti za proizvoljne v_x, v_y, v_z samo ako su funkcije \tilde{F}_{3D} i \tilde{F}_{1D} eksponencijalne funkcije.

Prema tome, funkcije raspodjele po komponentama brzina su:

$$F_{1D}(v_i) = \tilde{F}_{1D}(v_i^2) = A \exp(-\alpha v_i^2) \quad i = x, y, z$$

$$F_{3D}(\vec{v}) = \tilde{F}_{3D}(|\vec{v}|^2) = A^3 \exp(-\alpha (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2))$$

gdje su A i α neke nepoznate konstante koje treba odrediti.

Konstanta A može se odmah izračunati iz uvjeta normalizacije funkcije raspodjele po brzinama:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dv F_{1D}(v) &= 1 \\ &= A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\end{aligned}$$

pa je normalizacijska konstanta

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Pri ovome koristimo relaciju:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Kako računati integrale s eksponencijalnom funkcijom

Opći integral s eksponencijalnom funkcijom:

$$I_n = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x^2}$$

Slučaj I_0 :

$$\begin{aligned}(2 I_0)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)} \\ &= \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\rho^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Uvodimo polarne} \quad x = \rho \cos \varphi \\ \text{koordinate:} \quad y = \rho \sin \varphi \end{array} \right\} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-\rho^2} = \pi \int_0^{\infty} d\rho^2 e^{-\rho^2} = \pi \int_0^{\infty} dz e^{-z} = \pi\end{aligned}$$

Dakle:

$$I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Slučaj I_1 :

$$I_1 = \int_0^{\infty} dx x e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx^2 e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz e^{-z} = \frac{1}{2}$$

Opći slučaj I_n ($n > 1$):

$$I_n = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overbrace{d(e^{-x^2})}^{df} \underbrace{x^{n-1}}_v$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna} \\ \text{integracija} \end{array} \right. \quad \int df \cdot v = f \cdot v - \int dv \cdot f \left. \right\}$

$$= -\frac{1}{2} \left[x^{n-1} e^{-x^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} d(x^{n-1}) e^{-x^2} = \frac{n-1}{2} \int_0^{\infty} dx x^{n-2} e^{-x^2}$$
$$= \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

Konačni rezultat:

$$I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2} \quad \text{za } n > 1$$

Primjeri:

$$I_4 = \frac{4-1}{2} I_2 = \frac{4-1}{2} \frac{2-1}{2} I_0 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

$$I_5 = \frac{5-1}{2} I_3 = \frac{5-1}{2} \frac{3-1}{2} I_1 = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

...

Srednje vrijednosti brzina

Srednju vrijednost neke funkcije računamo po pravilu:

$$\overline{g(v_x, v_y, v_z)} = \int d^3v g(v_x, v_y, v_z) F_{3D}(v_x, v_y, v_z)$$

▷ Srednje vrijednosti komponenti brzine

$$\begin{aligned}\overline{v_x} &= \int d^3v v_x F_{3D}(v_x, v_y, v_z) \\ &= \int dv_x v_x F_{1D}(v_x) \cdot \underbrace{\int dv_y F_{1D}(v_y)}_{\equiv 1} \cdot \underbrace{\int dv_z F_{1D}(v_z)}_{\equiv 1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \underbrace{v_x F_{1D}(v_x)}_{\text{neparna f.}} \equiv 0.\end{aligned}$$

▷ Isto tako: $\overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$

▷ Srednja kvadratna brzina:

$$\begin{aligned}\overline{v_x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x^2 F_{1D}(v_x) = A \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} = \frac{2A}{\alpha^{3/2}} \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \\ &= \frac{2A}{\alpha^{3/2}} I_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{2}{\alpha^{3/2}} \frac{2-1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\alpha}\end{aligned}$$

▷ Isto se dobiva i za y i z komponentu brzine:

$$\overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

▷ Također:

$$\overline{|\vec{v}|^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{3}{2\alpha}$$

Srednja vrijednost kinetičke energije:

$$\bar{E} = \frac{m}{2} \overline{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \frac{3m}{4\alpha}$$

Srednju vrijednost kinetičke energije poznajemo iz *zakona jednake raspodjele energija* (ili *ekviparticijskog teorema*):

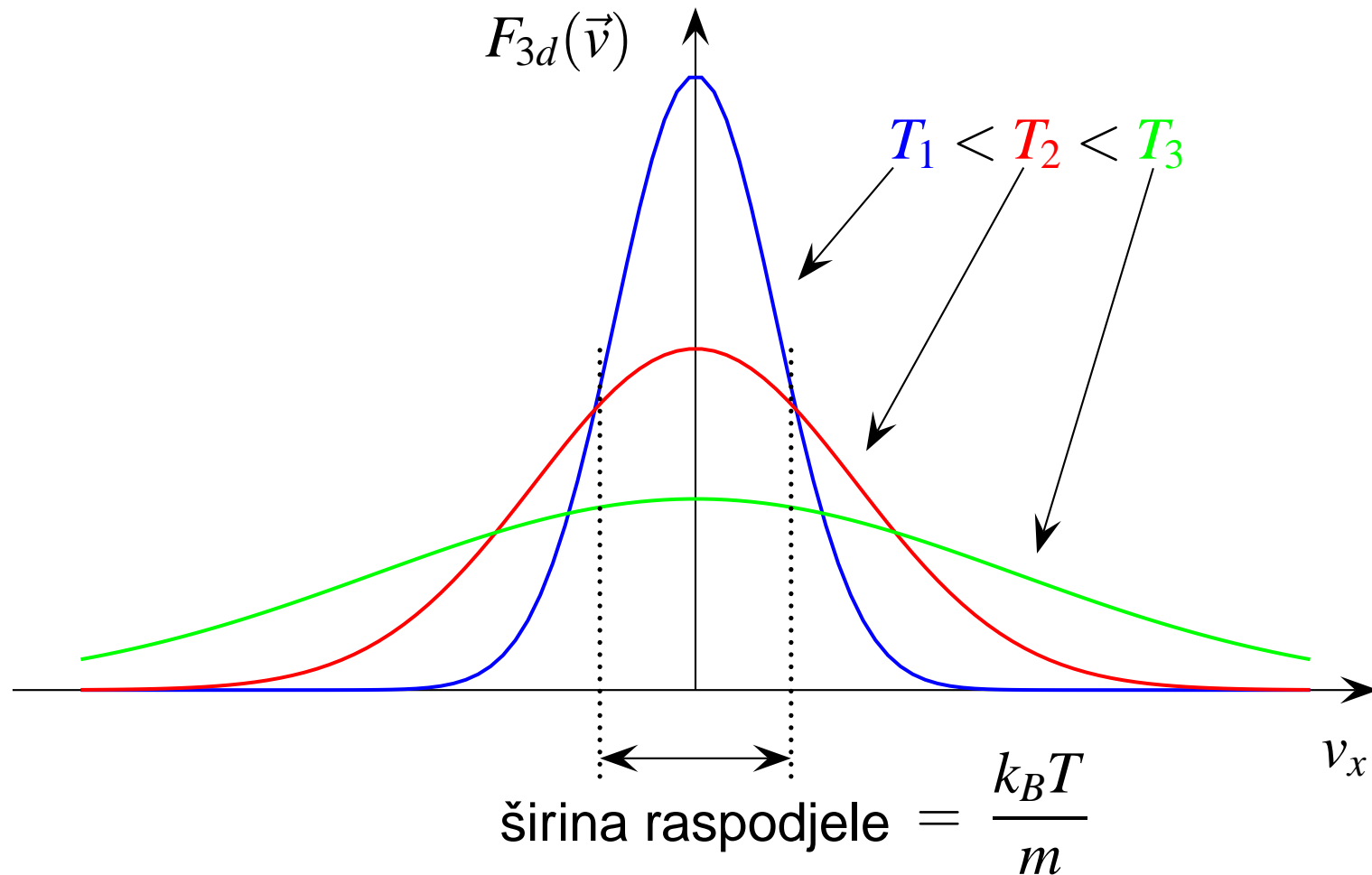
$$\frac{\overline{m v_x^2}}{2} = \frac{\overline{m v_y^2}}{2} = \frac{\overline{m v_z^2}}{2} = \frac{k_B T}{2}$$

Uspoređivanjem nalazimo vrijednost nepoznate konstante α :

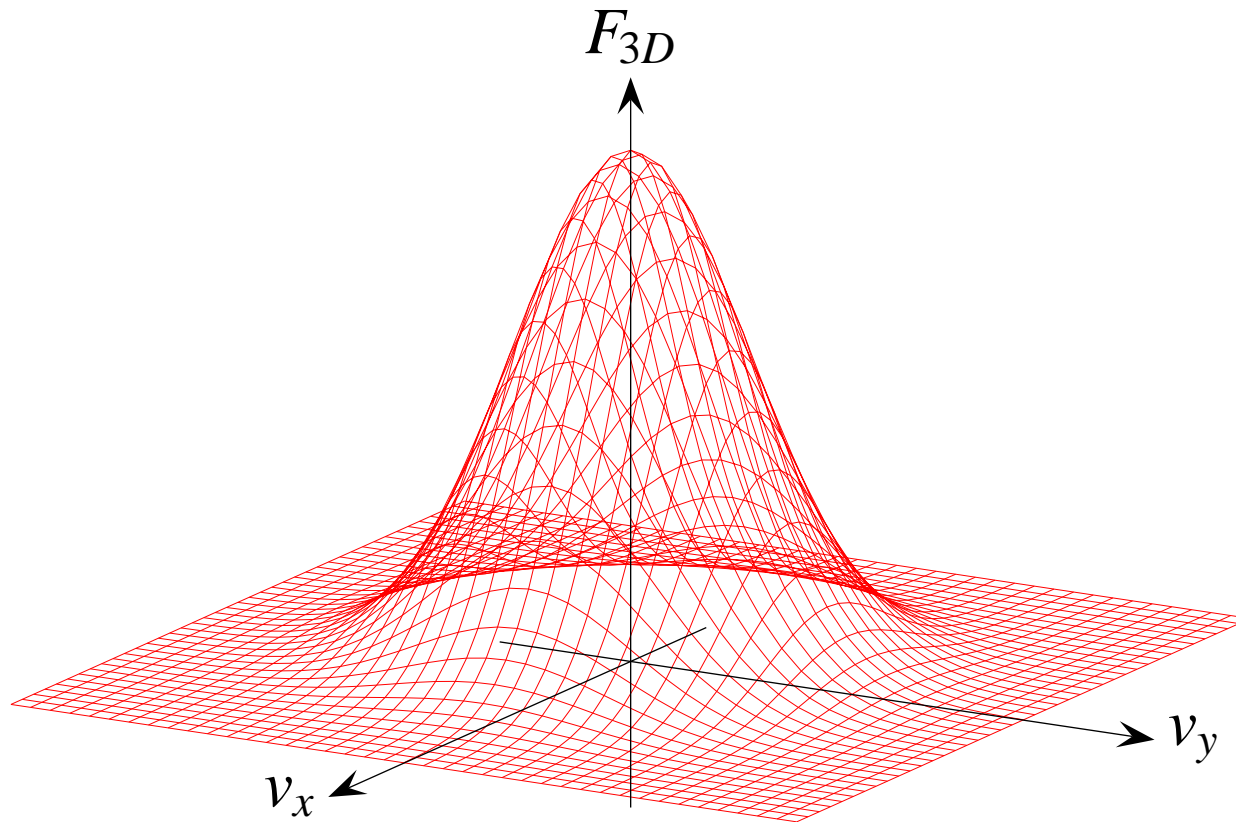
$$\alpha = \frac{m}{2k_B T}.$$

Maxwellova raspodjela čestica po brzinama:

$$F_{3D}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m|\vec{v}|^2}{2k_B T} \right) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\beta E_k}$$



Prava funkcija raspodjele je funkcija triju varijabli koju nije moguće jednostavno prikazati na slici. Ipak, ovisnost o samo dvama komponentama može se predstaviti na 3D-grafu:



Funkcija raspodjele po iznosu brzine

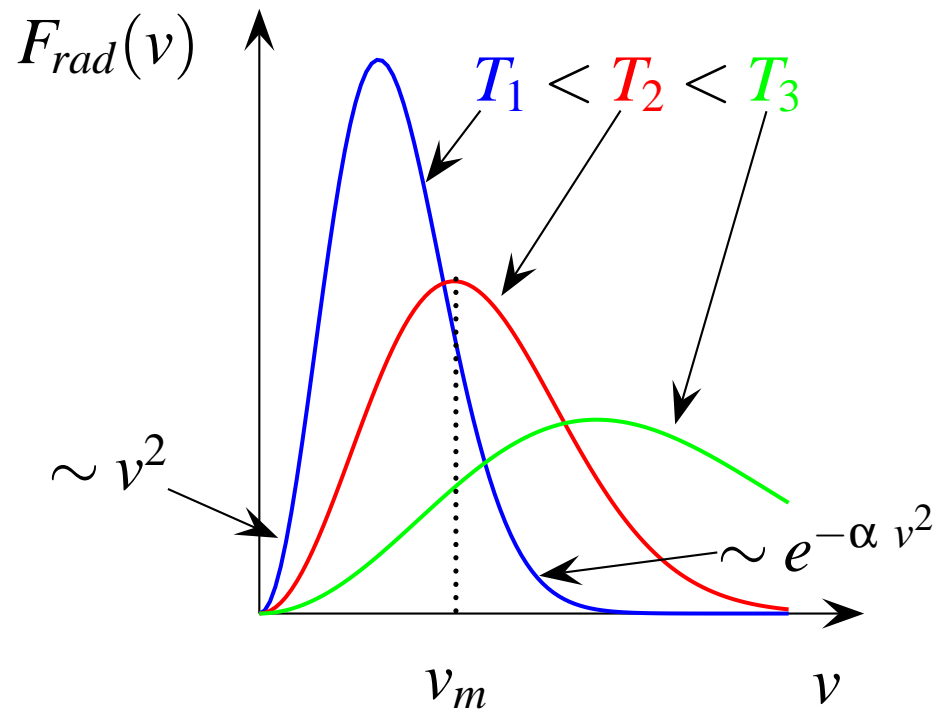
Nekada je potrebno izračunati srednju vrijednost neke veličine koja samo ovisi o iznosu brzine, ali ne i o smjeru brzine:

$$\begin{aligned}\overline{g(|\vec{v}|)} &= \int d^3v g(|\vec{v}|) F_{3D}(\vec{v}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{uvodimo sferne} \\ \text{koordinate} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v_x = v \cos \varphi \sin \vartheta \\ v_y = v \sin \varphi \sin \vartheta \\ v_z = v \cos \vartheta \end{array} \right\} \\ &= \int_0^\infty dv v^2 g(v) F_{3D}(v) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta}_{= 4\pi} \\ &= \int_0^\infty dv g(v) F_{rad}(v)\end{aligned}$$

gdje je

$$F_{rad}(v) = 4\pi A^3 v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right]$$

funkcija raspodjele po iznosu brzine



Funkcija raspodjele po iznosu brzine ima maksimum za neki iznos brzine v_m .

Iznos brzine v_m može se izračunati deriviranjem funkcije raspodjele:

$$\frac{dF_{rad}(v)}{dv} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\alpha v^2} \right) = 2v e^{-\alpha v^2} - 2\alpha v^3 e^{-\alpha v^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

Primjer: srednji iznos brzine

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int_0^{\infty} dv v F_{rad}(v) = 4\pi A^3 \int_0^{\infty} dv v v^2 e^{-\alpha v^2} \\ &= \frac{4\pi A^3}{\alpha^2} \int_0^{\infty} dx x^3 e^{-x^2} = \frac{4\pi A^3}{\alpha^2} \underbrace{I_3}_{=\frac{1}{2}} \Rightarrow\end{aligned}$$

Srednji iznos brzine:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Srednji iznos brzine:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Maksimum funkcije raspodjele po iznosu:

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Srednja kvadratna brzina:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = v_s = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Vrijedi:

$$\underbrace{v_m} < \bar{v} < \underbrace{v_s}$$
$$= \bar{v} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \qquad = \bar{v} \sqrt{\frac{3\pi}{8}}$$

Primjeri

- ▷ Srednji iznos brzine atoma plina neona ($m = 3,37 \cdot 10^{-26}$ kg) na temperaturi $T = 300$ K ?

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = 559,4 \text{ m/s.}$$

- ▷ Koliko atoma plina neona u jednom molu ima brzinu manju od \bar{v} ?
Neka je $T = 300$ K.

Vjerojatnost da čestica ima brzinu manju od \bar{v} je:

$$p = \int_0^{\bar{v}} dv F_{rad}(v) = 0,53305 \quad \{\text{numerička integracija !}\}$$

Broj atoma:

$$N(v \leq \bar{v}) = N_A \cdot p = 3,21 \cdot 10^{23}$$

- ▷ Koji je srednji iznos brzine čestica plina koji imaju brzinu veću ili jednako \bar{v} ?

$$v_{srd} = \frac{\int_{\bar{v}}^{\infty} dv v F_{rad}(v)}{\int_{\bar{v}}^{\infty} dv F_{rad}(v)} = \frac{\int_{\bar{v}}^{\infty} dv v^3 e^{-\alpha v^2}}{\int_{\bar{v}}^{\infty} dv v^2 e^{-\alpha v^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha v^2 = x \\ 2\alpha v dv = dx \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\int_{\bar{x}}^{\infty} dx x e^{-x}}{\int_{\bar{x}}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x}} = \frac{1,53769}{\sqrt{\alpha}} = 1.36274 \bar{v}$$

gdje je $\bar{x} = \alpha \bar{v}^2 = \frac{4}{\pi}$